الهندسة التحليلية

الآنسة نور الأسدي

الرياضيات 3

فريق الكرّيات الحمراء التطوعي

مسألة مهمة:

برهن أن المنحني المعطى بمعادلاته الوسيطية :

$$\begin{cases} x(t) = sh(t) \\ y(t) = ch(t) \\ z(t) = t \end{cases}$$

منحني صقيل ثم أوجد الزاوية بين المماس للمنحني والمحور **ox** :

المنحني أملس عندما:

1. جميع الدوال معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق على **R** كونها تتألف من دوال قطعية وكثيرات الحدود.
2. المشتقات الجزئية موجودة (لا تنعدم على أي نقطة)وهي معرفة ومستمرة على **R**

$$\begin{cases} x'(t) = ch(t) \\ y'(t) = sh(t) \\ z'(t) = 1 \end{cases}$$

$$\forall t: z'(t) = 1 \neq 0$$

المشتقات الجزئية لا تنعدم معا .

$$\forall t_1, t_2: t_1 \neq t_2 \to f(t_1) \neq f(t_2)$$

$$f(t_1) = f(t_2) \to t_1 = t_2$$

إيجاد معادلة المماس للمنحني (حصرا اذا كانت النقطة معلومة):

منحى توجيه المماس للمنحني $T(ch(t), sh(t), 1)$

منحى توجيه المحور **ox** $\vec{v}(1,0,0)$

$$cos\theta = \frac{ch(t).1+0+0}{\sqrt{ch^2t+sh^2t+1}\sqrt{1}}$$

$$cos\theta = \frac{ch(t)}{\sqrt{2ch^2t}}$$

$$ch^2t - sh^2t = 1$$

$$ch^2t = sh^2t + 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

مسألة:

أوجد نصف قطر الدائرة المعينة بالمعادلتين:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 5 = 0$$

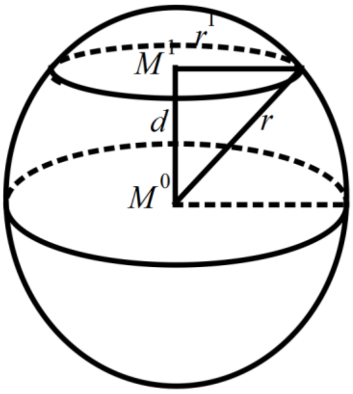
$$2x + 8y + 7z - 4 = 0$$

من المعادلة الأولى : $x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 + z^2 - 5 = 0$

$$(x-3)^2 + y^2 + z^2 = 14$$

وهي ممعادلة الكرة مركزها $(3,0,0)$ ونصف قطرها $r = \sqrt{14}$

حسب فيثاغورث : $d = \frac{|2*3-0+0-4|}{\sqrt{4+64+49}} = \frac{2}{\sqrt{117}}$



$$r_1^2 = r^2 - d^2$$

$$r_1^2 = 14 - \frac{14}{117}$$

$$r_1 = \sqrt{\frac{1634}{117}}$$

مسألة:

برهن أن المجسم $S_1 \equiv x^2 + y^2 = z$

والمستوي $P \equiv z = y + 2$

يتقاطعان على الأسطوانة $x^2 + (y-1)^2 = 1$ ثم أوجد معادلة المستوي المماس ل S_1 وذلك عند النقطة التي يكون عندها موازيا ل P

الحل:

من فك المطابقة:

$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$
$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 2y$$

و من بالمطابقة مع معادلة المجسم و المستوي نجد:

$$2y = y + 2 \rightarrow y = 2 \rightarrow x = 0, z = 4$$

إذا النقطة $(0, 2, 4)$ نقطة مشتركة واقعة على الأسطوانة و تمر في المستوي و المجسم

2) بفرض أن $M_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطة من السطح S وأن المستوي المماس عند هذه النقطة يوازي P إذا معادلة المستوي هي:

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) + r(z - z_0) = 0$$

إذا علينا الان تحديد M_0

إن شرط توازي ناظمي السطحين S و P هو أن تكون نسب مشتقات مركباتهما يساوي ثابت أي:

$$\frac{2x}{0} = \frac{2y}{-1} = \frac{1}{1}$$

حيث أن البسوط هي مشتقات المجسم S و المقامات مشتقات المستوي P بأخذ أول طرفين للمساواة يكون: $\frac{2x}{0} = \frac{2y}{-1}$

$$-2x = 0 \rightarrow x = 0$$

بأخذ ثاني طرفين للمعادلة: $\frac{2y}{-1} = \frac{1}{1}$

$$2y = -1 \rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

و نحدد قيمة ال **z** وذلك بتعويض كل من **x** و **y** في معادلة المجسم فيكون:

$$z = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

إذا أصبحت النقطة هي $M_0\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

و إن كل من **p,q,r** هي عبارة عن أمثال المستوي إذا أصبحت معادلة المستوي هي:

$$0(x-0) - 1\left(y+\frac{1}{2}\right) + \left(z-\frac{1}{4}\right) = 0$$

مسألة(2):

حدد قيمة λ حتى يكون المستقيم المار بالنقطتين $A(0,0,1)$ و $B(0,1,2)$ مماس للكرة $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + \lambda = 0$